Differentialligninger

Henrik Skov Midtiby

Mærsk Mc–Kinney Møller Instituttet, SDU, hemi@mmmi.sdu.dk

2021-09-30

Indhold

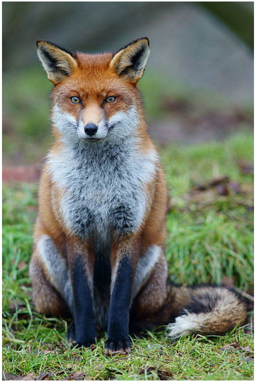
Hvordan har jeg lært om differentialligninger?

- Cand. scient. i Fysik og Datalogi
- Phd i Robotteknologi
- Underviser på Det Tekniske Fakultet
- Arbejder med analyse af drone billeder

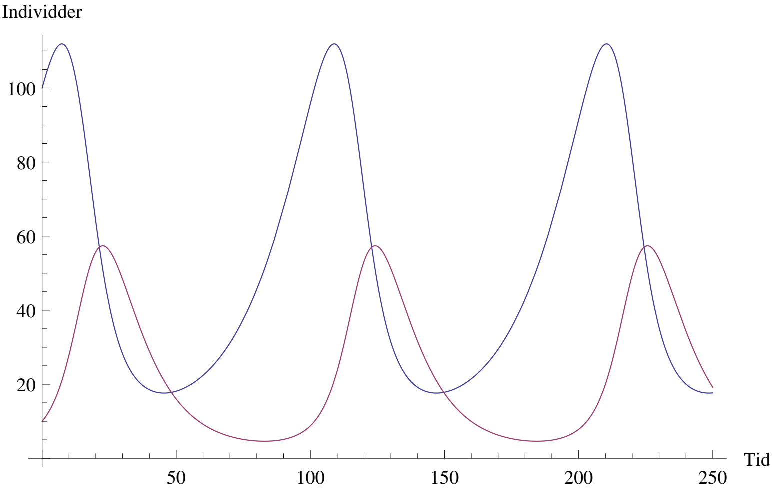
Simulering af gamle kastemaskiner

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Trebuchet.jpg

Lotka–Volterra populations modeller



Populations modeller – Lotka Volterra



Indhold

Ligninger

$$2x = 7$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

Ligninger

$$2x = 7$$

$$x = \frac{7}{2}$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

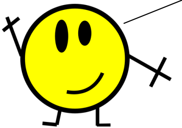
$$x = \frac{-1}{3} \vee x = 1$$

Ligninger

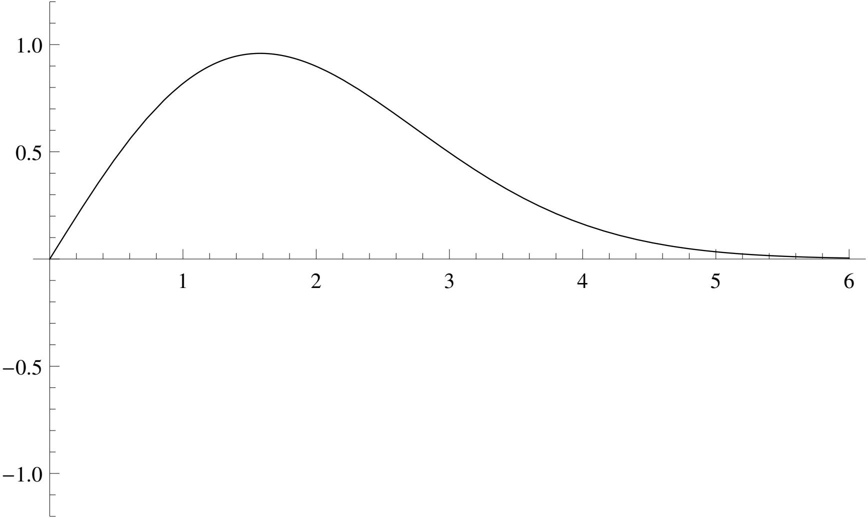
$$2x = 7 \qquad\qquad 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{7}{2} \qquad\qquad x = \frac{-1}{3} \vee x = 1$$

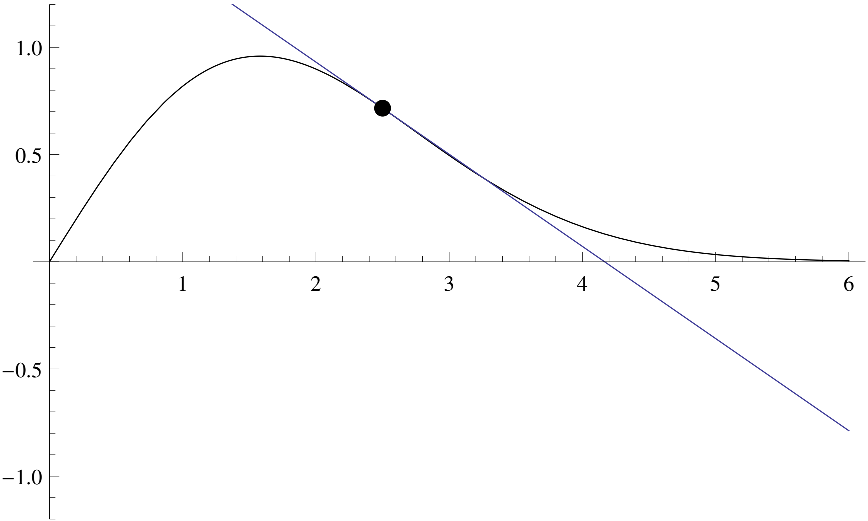
Ligninger har *værdier* som løsninger.



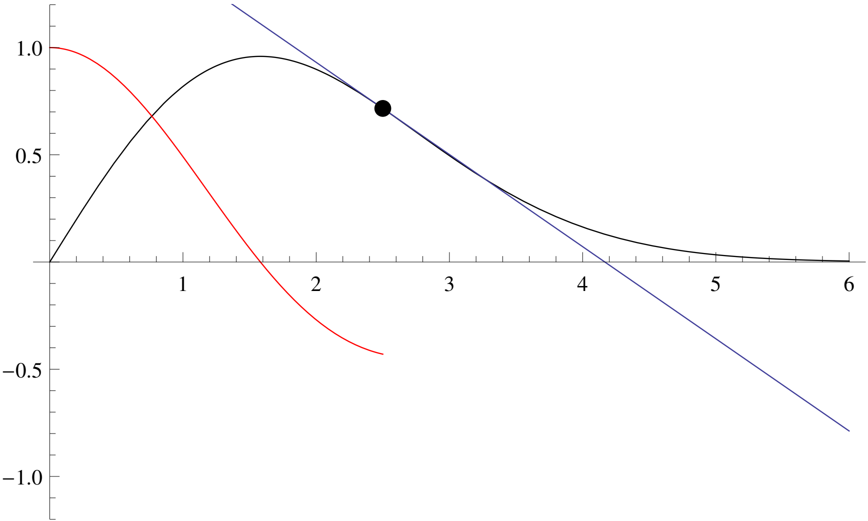
Den afledte af en funktion



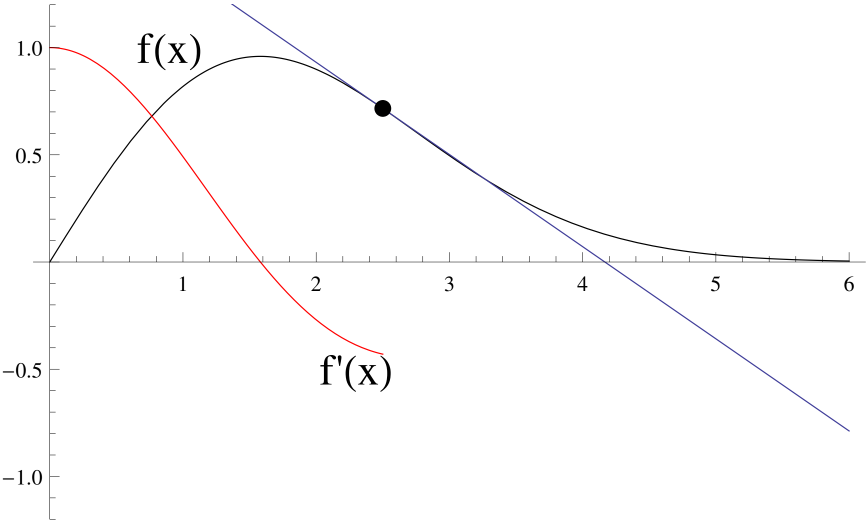
Den afledte af en funktion



Den afledte af en funktion

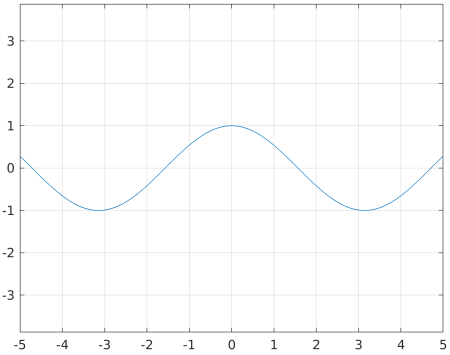


Den afledte af en funktion



Skitser den afledte af en funktion

Åbn: `tekvideo.sdu.dk/draw/student/hemi` og skitser den afledte



Den afledte af en funktion

Funktion: $f(x)$
Den afledte af funktionen: $f'(x)$, $\frac{df}{dx}$

Differentialligninger

$$y'(x) = -0.4 \cdot y(x)$$

$$y(x) \cdot y'(x) = 2$$

Differentialligninger

$$y'(x) = -0.4 \cdot y(x)$$

$$y(x) \cdot y'(x) = 2$$

$$y' = -0.4 \cdot y$$

$$y \cdot y' = 2$$

Differentialligninger

$$y'(x) = -0.4 \cdot y(x)$$

$$y(x) \cdot y'(x) = 2$$

$$y' = -0.4 \cdot y$$

$$y \cdot y' = 2$$

$$y = A \cdot \exp(-0.4x)$$

$$y = \sqrt{4x + B}$$

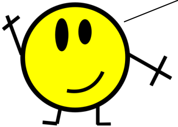
Differentialligninger

$$y'(x) = -0.4 \cdot y(x) \qquad\qquad y(x) \cdot y'(x) = 2$$

$$y' = -0.4 \cdot y \qquad\qquad y \cdot y' = 2$$

$$y = A \cdot \exp(-0.4x) \qquad\qquad y = \sqrt{4x + B}$$

Differential ligninger har *funktioner* som løsninger.



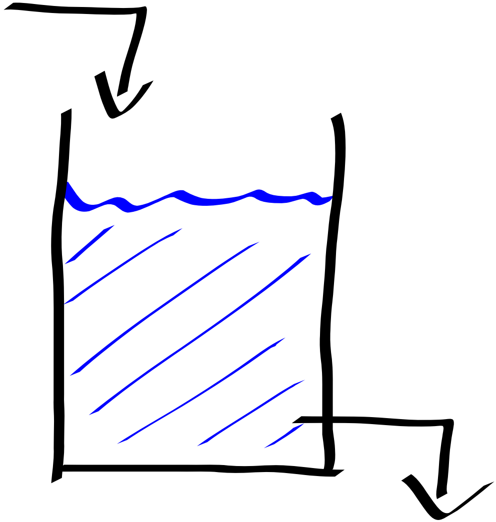
Hvorfor differentialligninger

Påstand

Verden er lettere at beskrive ved brug af differentialligninger.

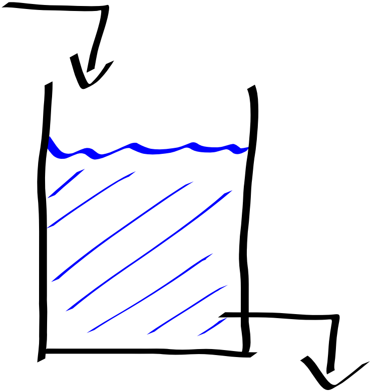
Indhold

Fortynding af opløsning over tid



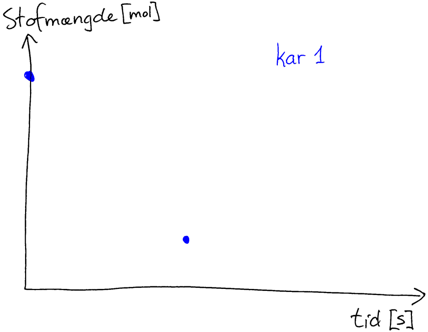
Fortynding af opløsning over tid

- Beholderens volumen, V
- Flowet igennem beholderen, $\dot{V}$
- Stofmængde ved start, n_0



Fortynding af opløsning over tid

Åbn: `tekvideo.sdu.dk/draw/student/hemi` og skitser den afledte



Indtegn hvordan I forventer at stofmængden ændres over tid for kar 2.

Børnelærdom

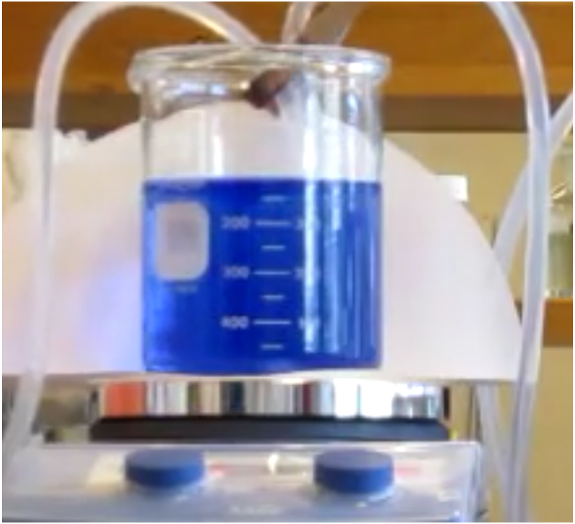
Børnelærdom

– Næh, Skvatte, sine venner byder man ikke vand. Men jeg har lige brygget saftevand. Du kan tro det er godt.

– Drik, kære ven, så længe jeg har vand, har jeg også saftevand . . . men det sidste bliver nok lidt tyndt.

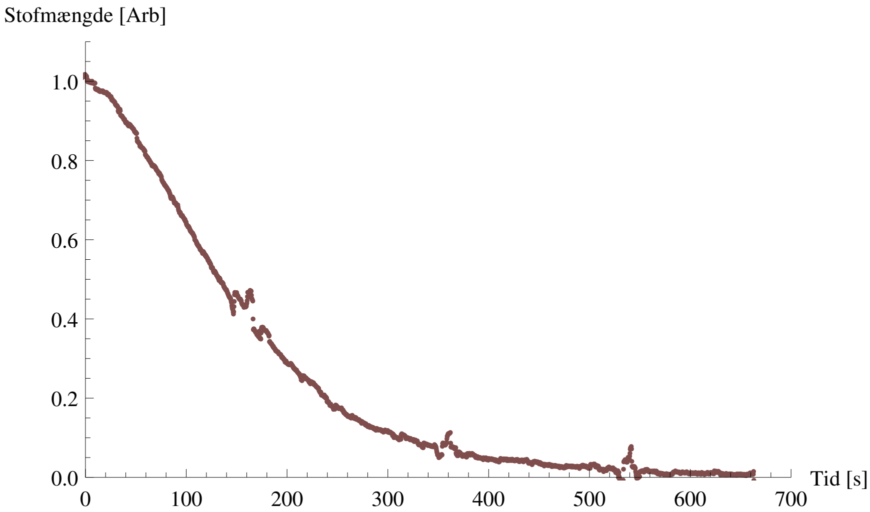
Rasmus Klump blandt hattesvingere, 1976, Carla & Vilhelm Hansen

Eksperiment – Se video

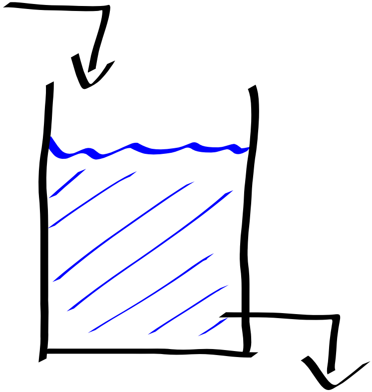


https://www.youtube.com/watch?v=LhzM3RMzVvg

Eksperimentet – Koncentrations målinger



Stofmængde flow



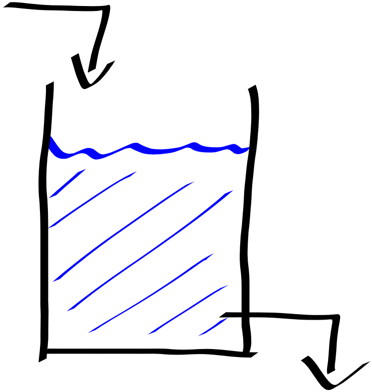
Stofmængde ind og ud

$$\dot{n}_{ind} = c_{ind} \cdot \dot{V}$$
$$\dot{n}_{ud} = c_{ud} \cdot \dot{V}$$

Ændring af stofmængde

$$\dot{n}_{ind} - \dot{n}_{ud} = c_{ind} \cdot \dot{V} - c_{ud} \cdot \dot{V}$$

Stofmængde flow



Skrevet som en differentialligning

$$\frac{dn}{dt} = (c_{ind} - c_{ud}) \cdot \dot{V}$$

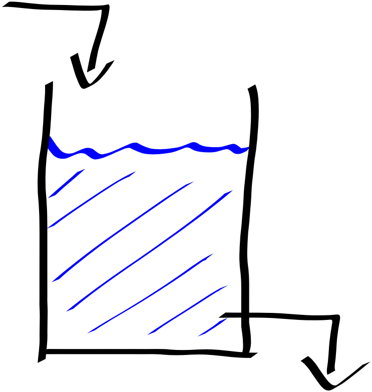
Rent vand ind

$$c_{ind} = 0$$

Koncentrationen af det der løber ud

$$c_{ud} = \frac{n}{V}$$

Stofmængde flow



Skrevet som en differentialligning

$$\frac{dn}{dt} = -n \cdot \frac{\dot{V}}{V}$$

En differential ligning – hvad nu?

$$\frac{dn}{dt} = -n \cdot \frac{\dot{V}}{V}$$

$$\frac{dn}{dt} = -0.008 \cdot n$$

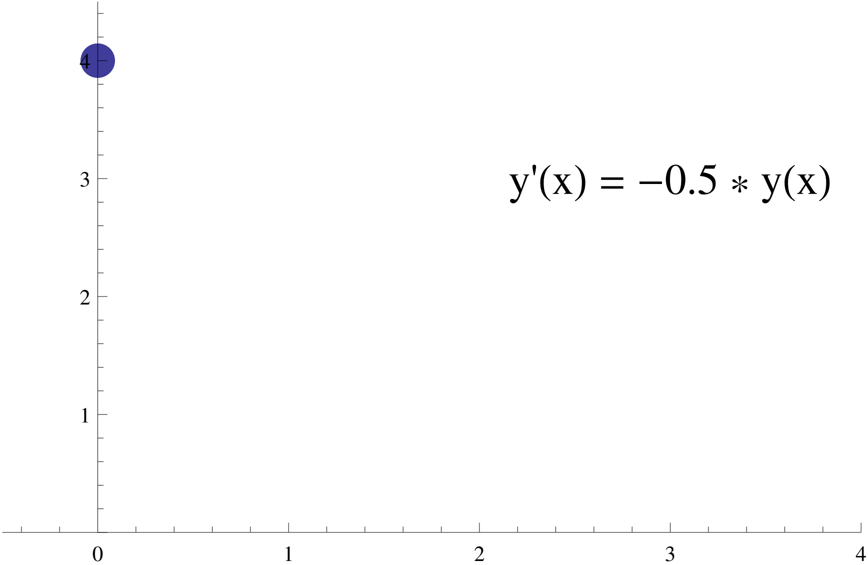
Matematikerens tilgang - Analytisk løsning

Separable differentialligninger
Første ordens lineære differentialligninger

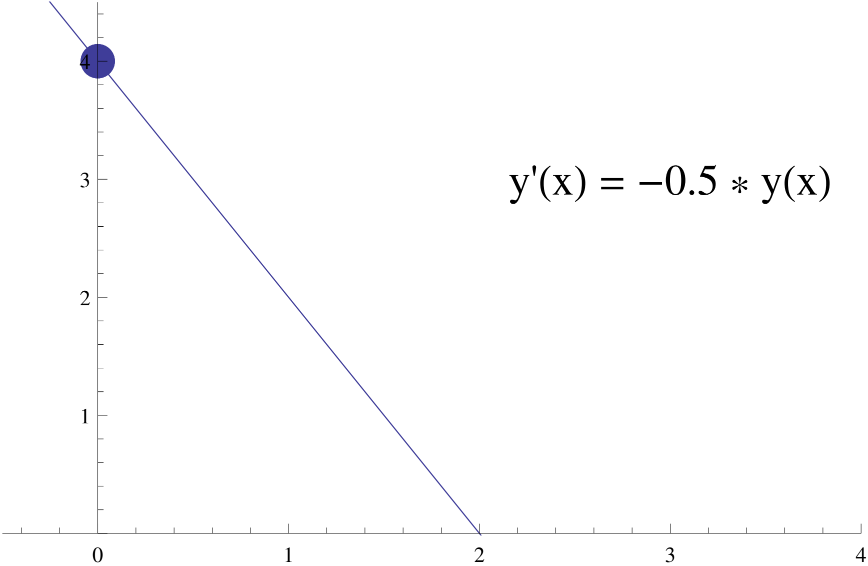
Ingeniørens tilgang

Numerisk løsning

Numerisk løsning – grafisk

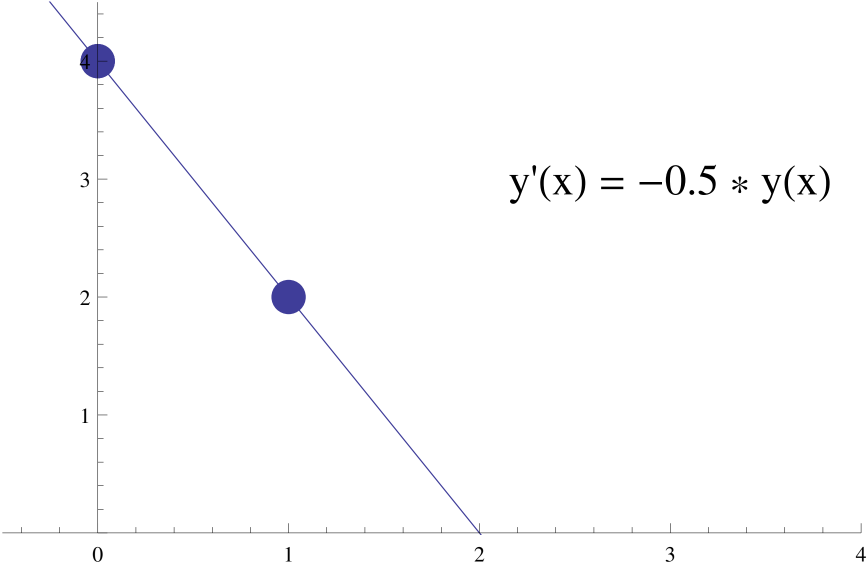


Numerisk løsning – grafisk

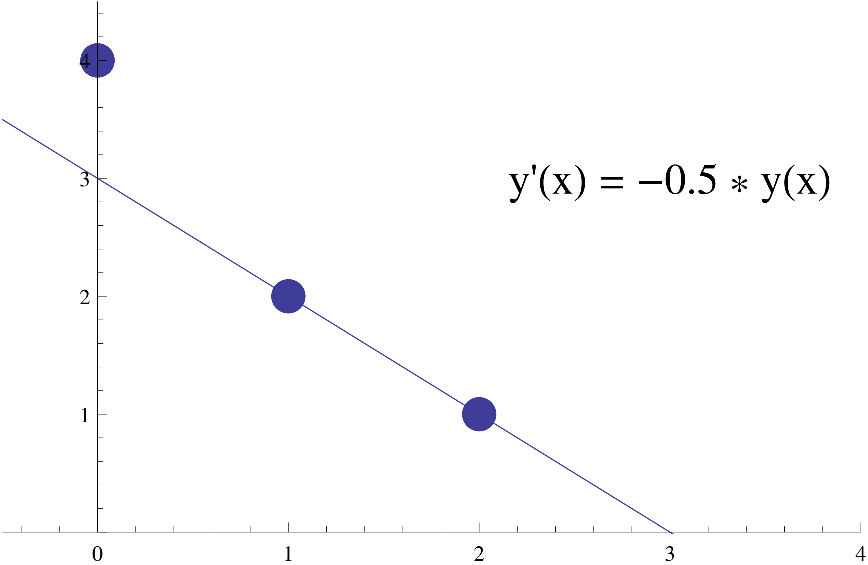


$$y'(x) = -0.5 * y(x)$$

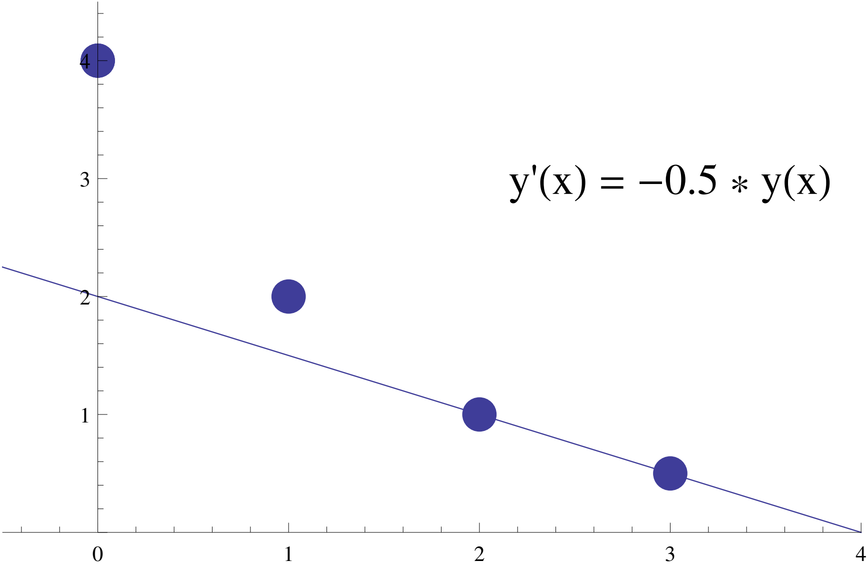
Numerisk løsning – grafisk



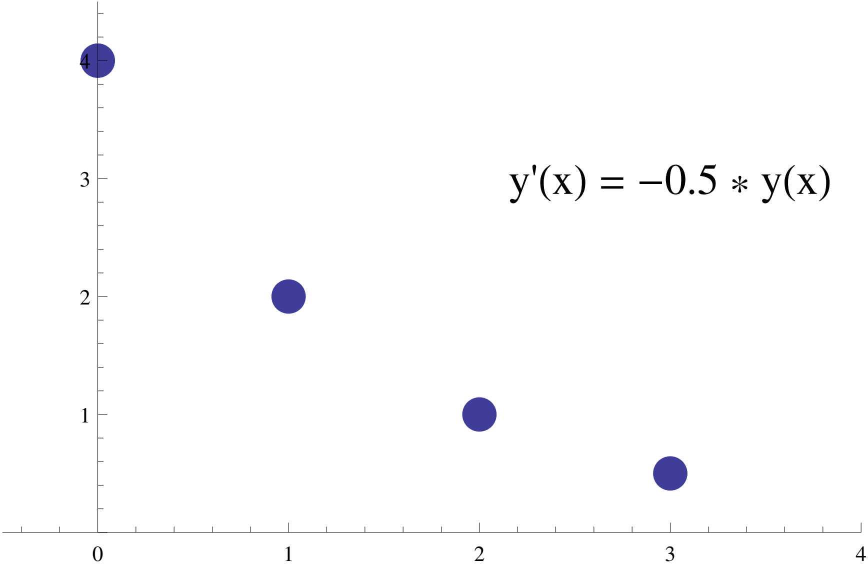
Numerisk løsning – grafisk



Numerisk løsning – grafisk



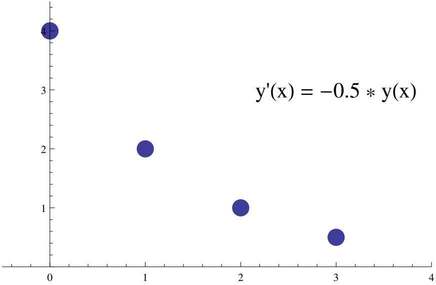
Numerisk løsning – grafisk



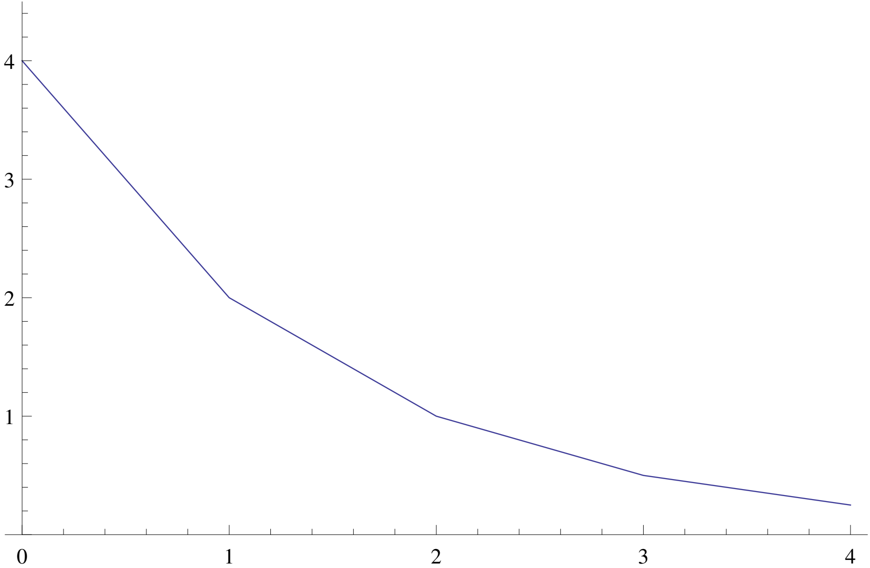
Numerisk løsning – med tal

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot y'(x)$$

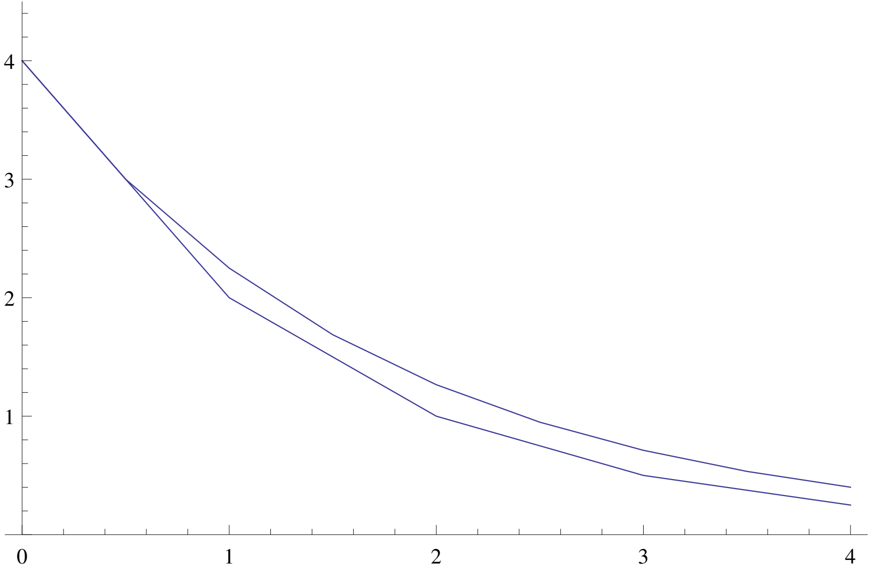
x	$y(x)$	$y'(x)$
0.00	4.00	-2.00
1.00	2.00	-1.00
2.00	1.00	-0.50
3.00	0.50	-0.25



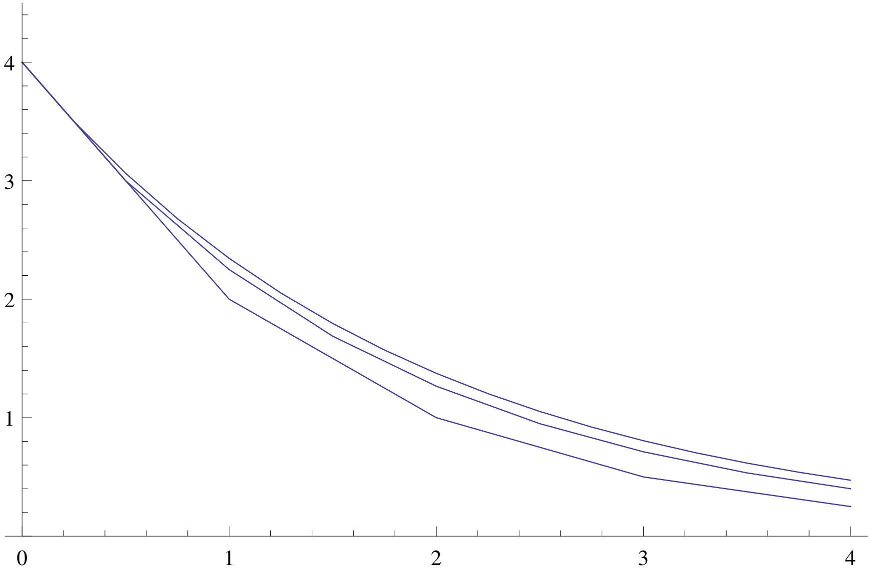
Skridt længden gøres mindre



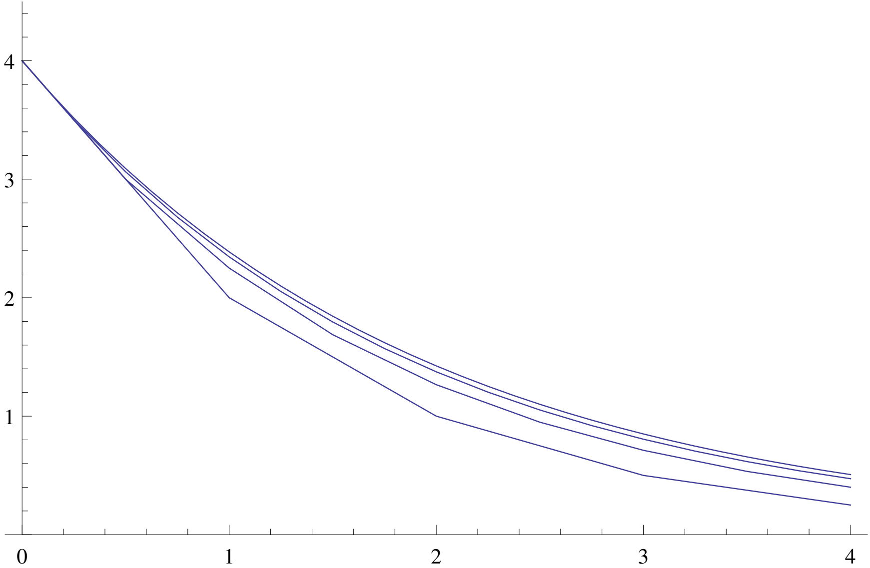
Skridt længden gøres mindre



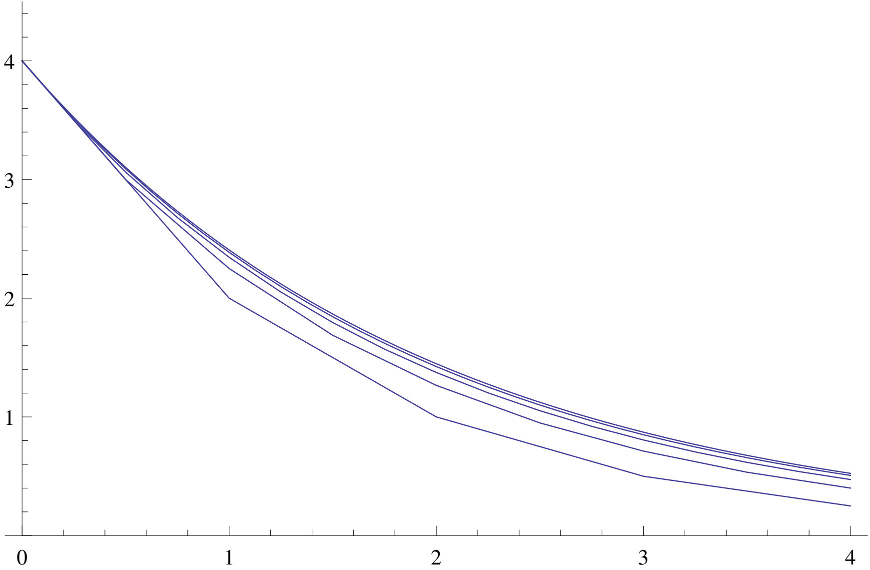
Skridt længden gøres mindre



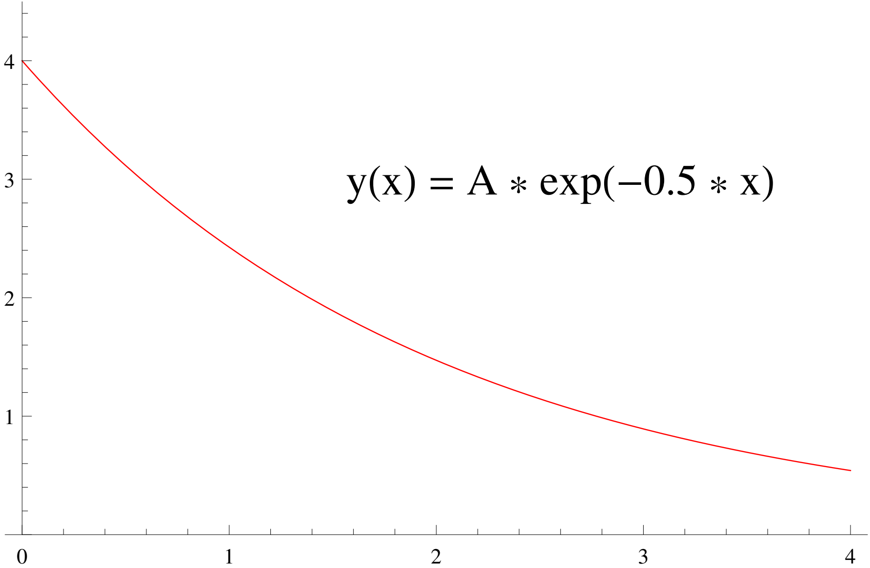
Skridt længden gøres mindre



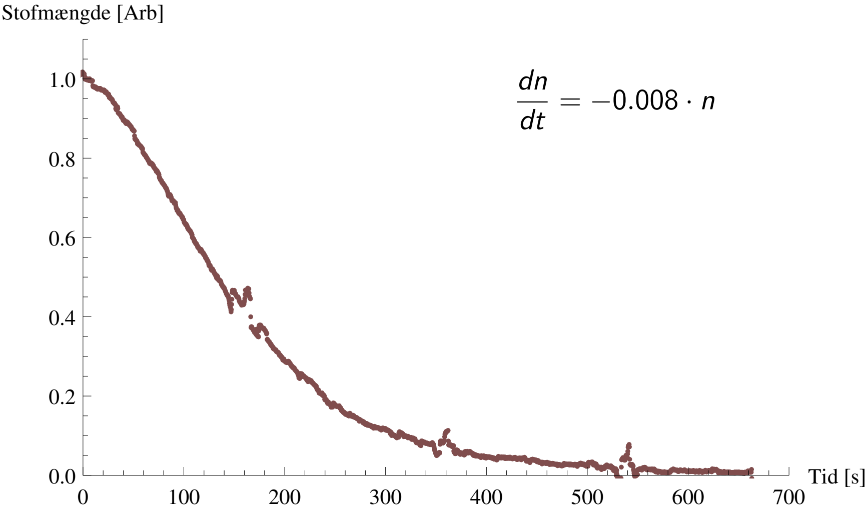
Skridt længden gøres mindre



Skridt længden gøres mindre

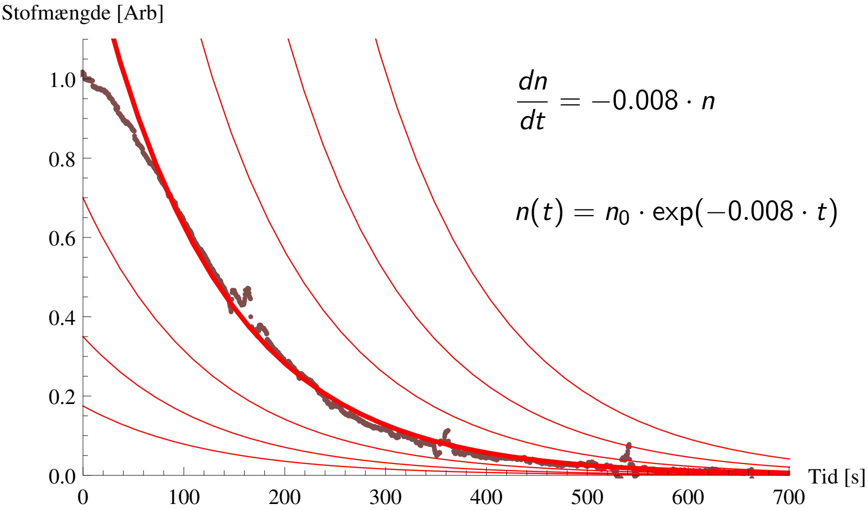


Eksperimentet



$$\frac{dn}{dt} = -0.008 \cdot n$$

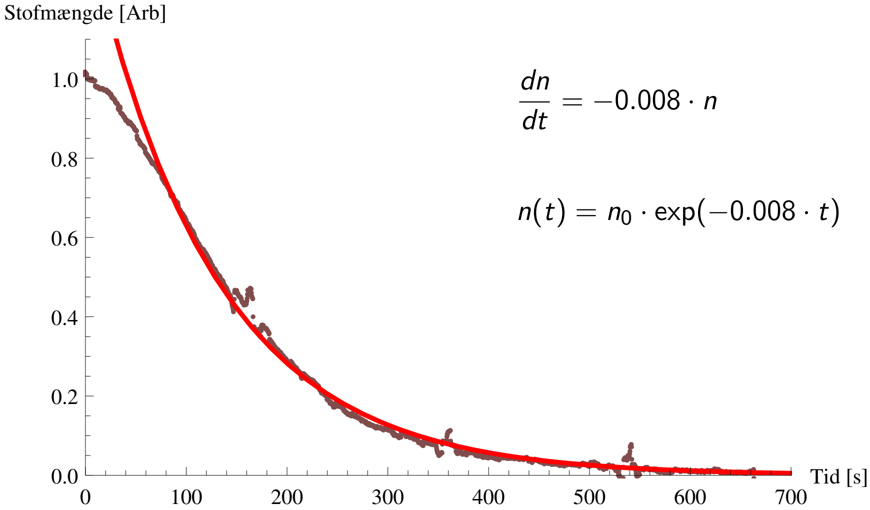
Eksperimentet



$$\frac{dn}{dt} = -0.008 \cdot n$$

$$n(t) = n_0 \cdot \exp(-0.008 \cdot t)$$

Eksperimentet

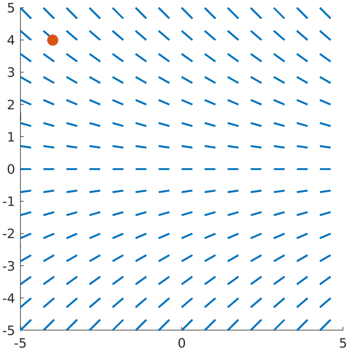


$$\frac{dn}{dt} = -0.008 \cdot n$$

$$n(t) = n_0 \cdot \exp(-0.008 \cdot t)$$

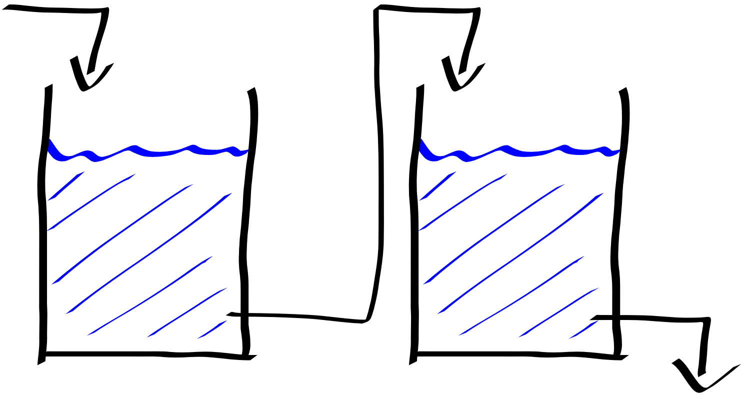
Skitser løsningen til denne differentialligning

Åbn: `tekvideo.sdu.dk/draw/student/hemi` og skitser kurven ud fra slope plottet og det givne start punkt

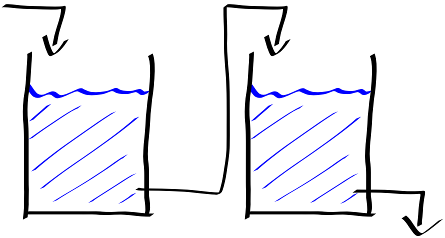


Indhold

Fortynding af opløsning over tid



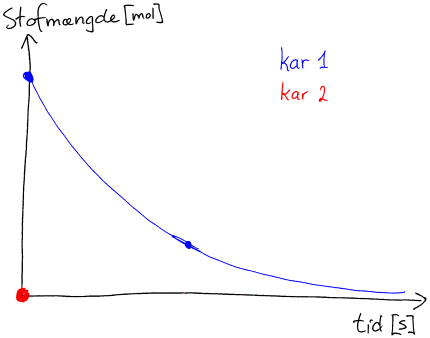
Fortynding af opløsning over tid



Der ledes rent vand ind i kar 1.
Kar 1: Farvet vand til $t = 0$.
Kar 2: Rent vand til $t = 0$.

Fortynding af opløsning over tid

Åbn: `tekvideo.sdu.dk/draw/student/hemi`



Indtegn hvordan I forventer at stofmængden ændres over tid for kar 2. Kurven skal starte i det røde punkt.

Eksperiment – Se video

https://www.youtube.com/watch?v=Sq5V-WyqsGg

Eksperiment – Differentialligninger

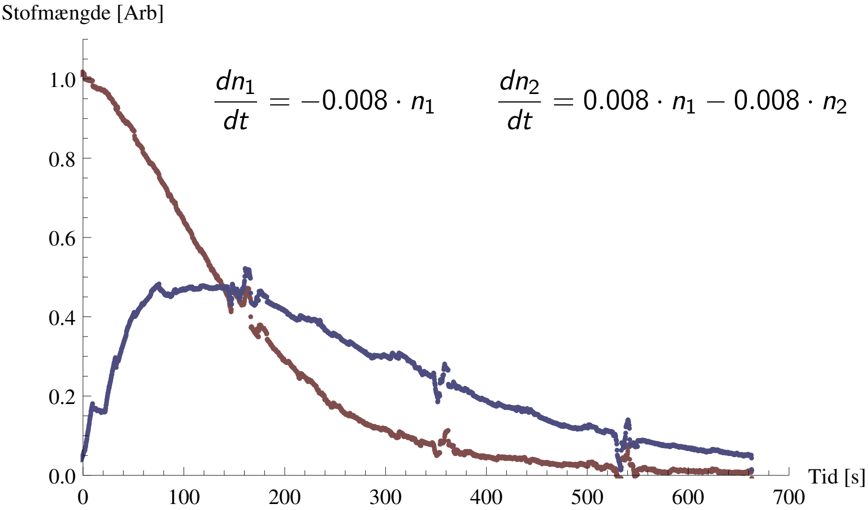
$$\frac{dn_1}{dt} = -n_1 \cdot \frac{\dot{V}}{V} \qquad \frac{dn_2}{dt} = n_1 \cdot \frac{\dot{V}}{V} - n_2 \cdot \frac{\dot{V}}{V}$$

$$n_1(0) = 1.4 \qquad n_2(0) = 0$$

$$\dot{V} = 3.2 \qquad V = 400$$

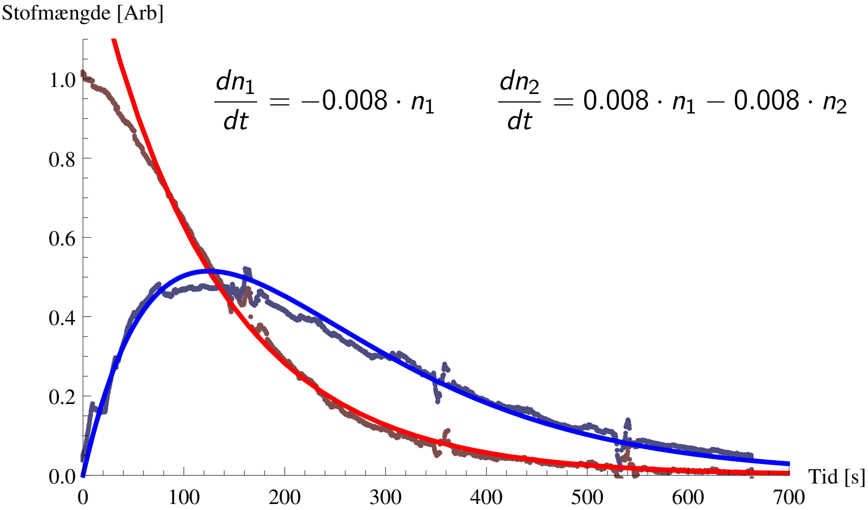
Eksperimentet

$$\frac{dn_1}{dt} = -0.008 \cdot n_1 \qquad \frac{dn_2}{dt} = 0.008 \cdot n_1 - 0.008 \cdot n_2$$

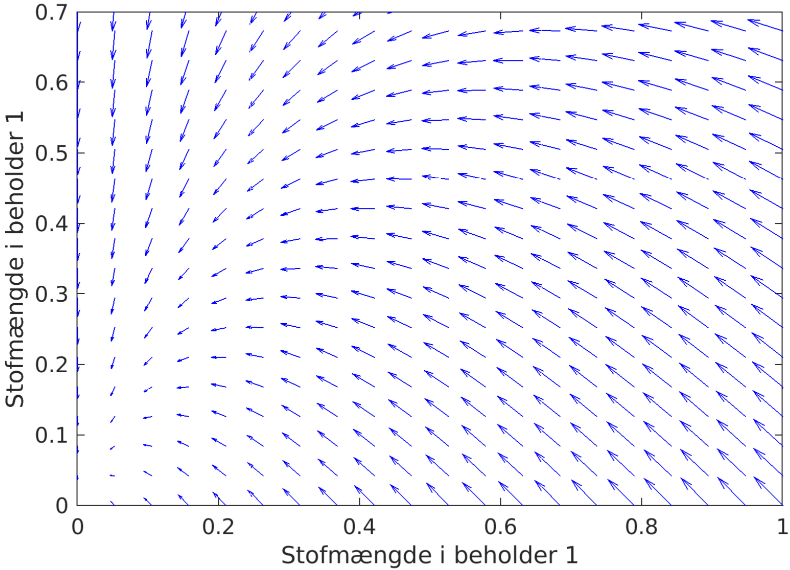


Eksperimentet

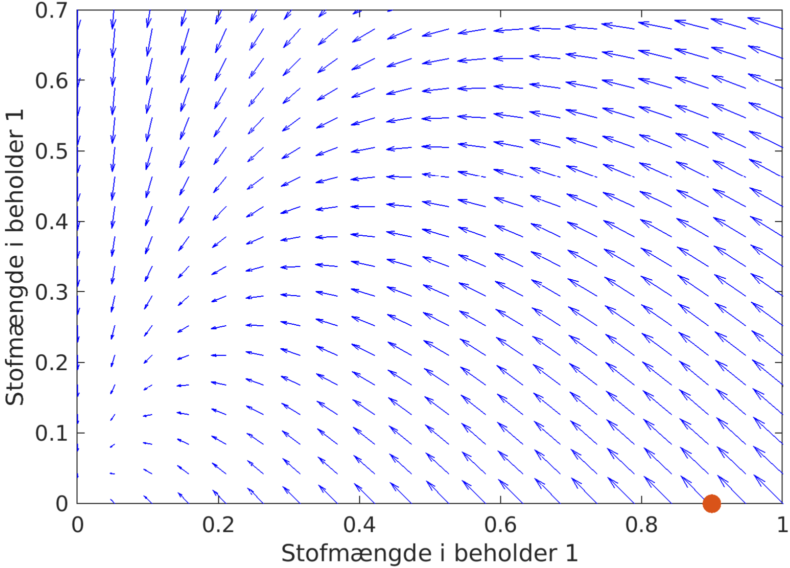
$$\frac{dn_1}{dt} = -0.008 \cdot n_1 \qquad \frac{dn_2}{dt} = 0.008 \cdot n_1 - 0.008 \cdot n_2$$



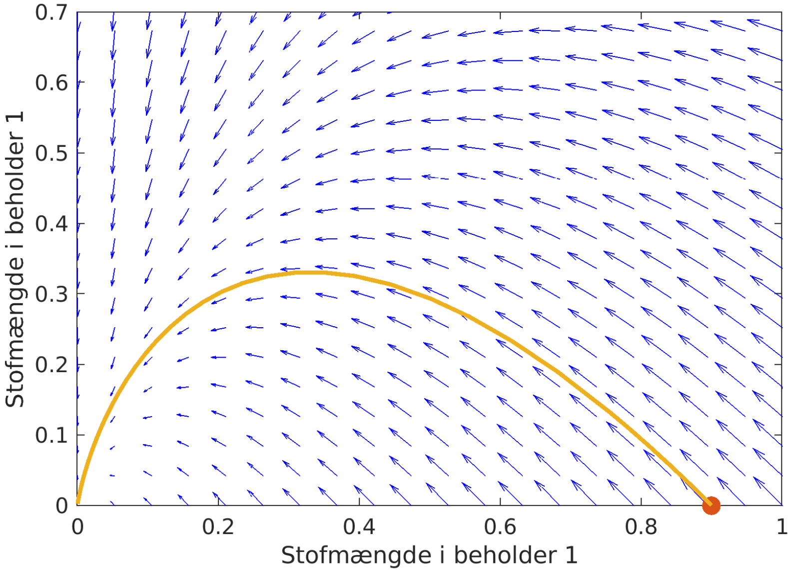
Fase diagram



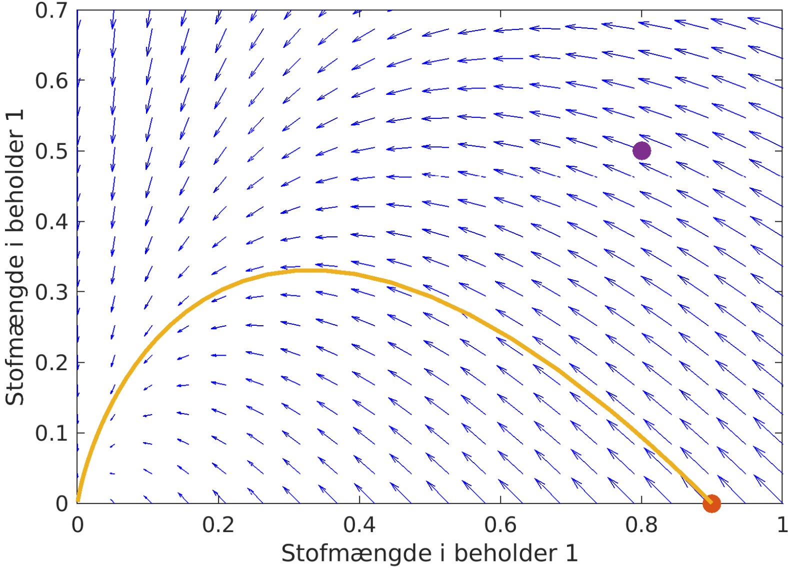
Fase diagram



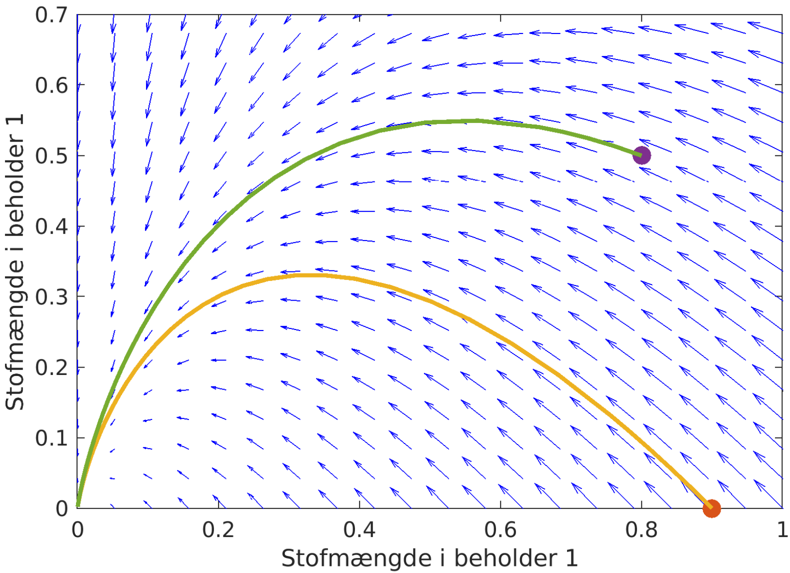
Fase diagram



Fase diagram

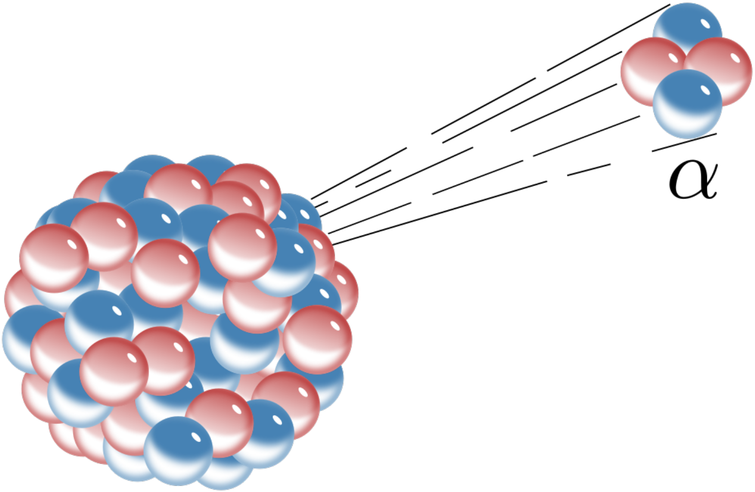


Fase diagram



Indhold

Radioaktivt henfald



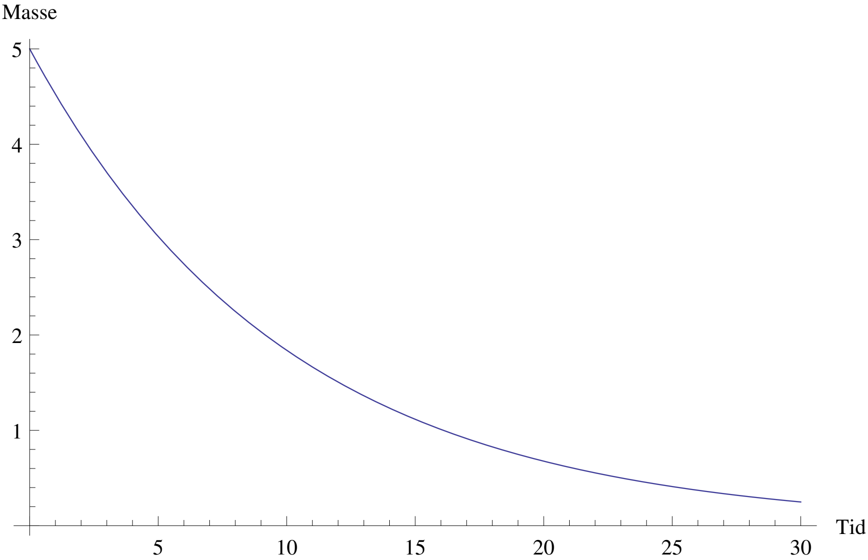
Radioaktivt henfald

- λ er en konstant for det radioaktive stof
- N er stofmængden

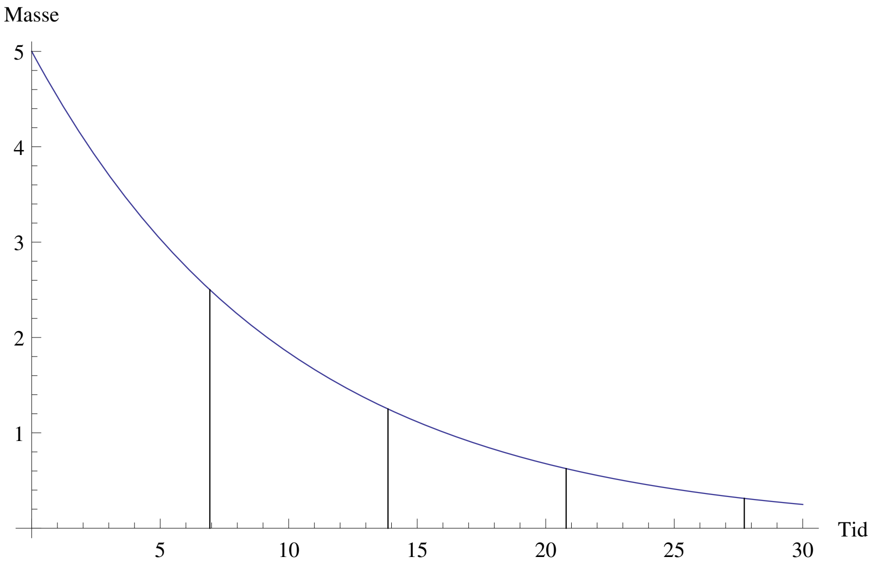
$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

http://www.math24.net/radioactive-decay.html

Radioaktivt henfald



Radioaktivt henfald



Halveringstid

$$\frac{y(0)}{2} = y(t_{1/2})$$

$$\frac{y_0 \cdot \exp(-\lambda 0)}{2} = y_0 \cdot \exp(-\lambda t_{1/2})$$

$$\frac{1}{2} = \exp(-\lambda t_{1/2})$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Eksponentiel vækst – Celle deling

http://vimeo.com/14316782

Eksponentiel vækst – Celle deling

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N$$

$$\frac{dN}{dt} = 0.1 \cdot N$$

$$N(t) = N_0 \cdot exp(kt)$$

$$N(t) = N_0 \cdot exp(0.1t)$$

Logistisk vækst – Når pladsen bliver trang

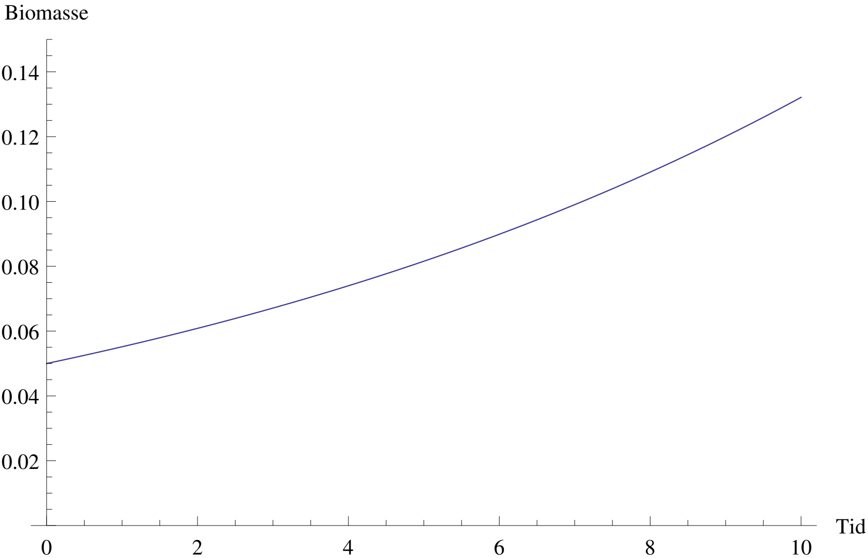
$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N$$

Logistisk vækst – Når pladsen bliver trang

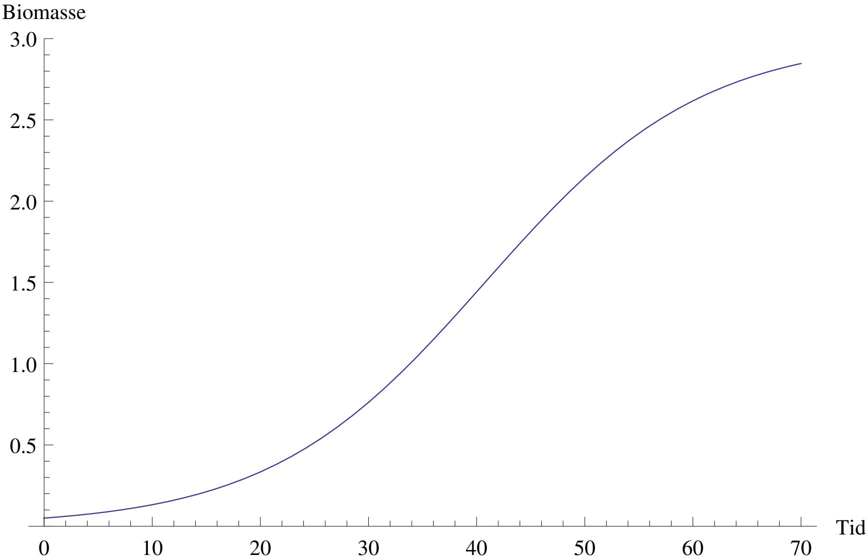
$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N$$

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N \cdot \left(1 - \frac{N}{N_{max}}\right)$$

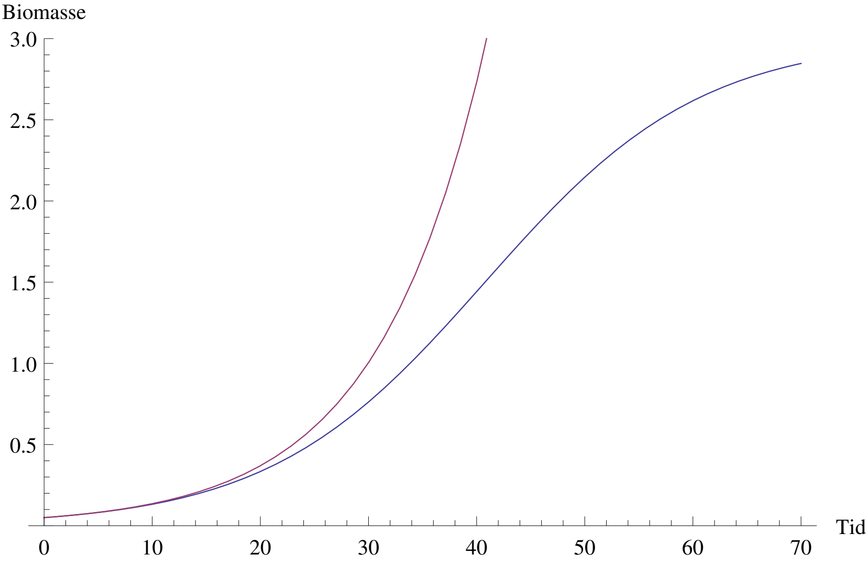
Logistisk vækst – Når pladsen bliver trang



Logistisk vækst – Når pladsen bliver trang



Logistisk vækst – Når pladsen bliver trang

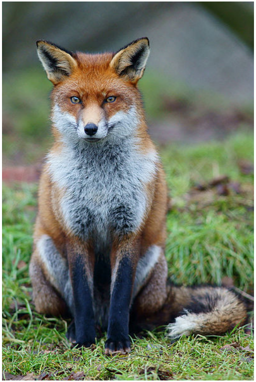


Logistisk vækst – Når pladsen bliver trang

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N \qquad N(t) = a \cdot \exp\left(k \cdot t\right)$$

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N \cdot \left(1 - \frac{N}{N_{max}}\right) \qquad \begin{aligned} N(t) &= \frac{N_{max}}{1 + a \cdot \exp\left(-k \cdot t\right)} \\ &= \frac{N_{max} \cdot y_0}{y_0 + \left(N_{max} - y_0\right) \cdot e^{-kt}} \end{aligned}$$

Lotka–Volterra populations modeller



Lotka–Volterra populations modeller

Ræve R og kaniner K på en lille ø

Kanin bestanden vokser proportionelt $\alpha \cdot K$.
Når en kanin og en ræv mødes

- mindskes kanin bestanden $\beta \cdot K \cdot R$
- øges ræve bestanden $\gamma \cdot K \cdot R$

Uden noget at spise mindskes ræve bestanden proportionelt $\delta \cdot R$

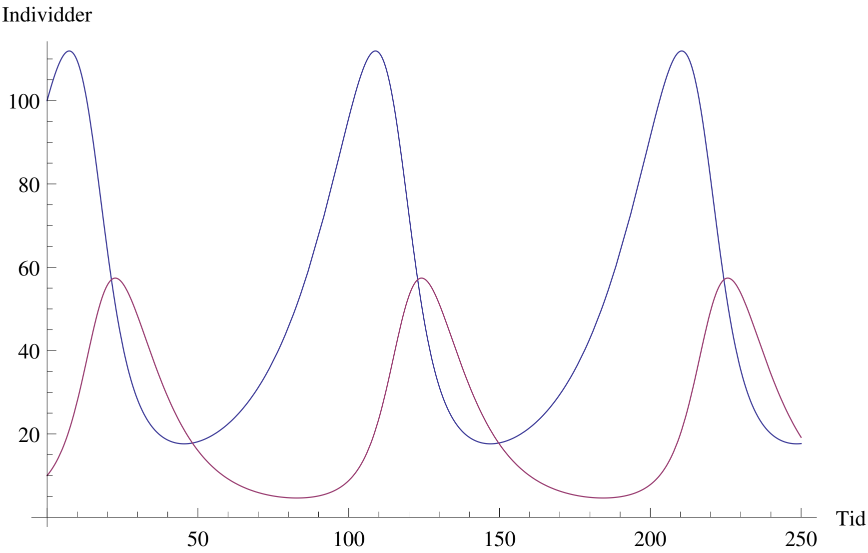
Lotka–Volterra populations modeller

$$\frac{dK}{dt} = \alpha \cdot K - \beta \cdot K \cdot R$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma \cdot K \cdot R - \delta \cdot R$$

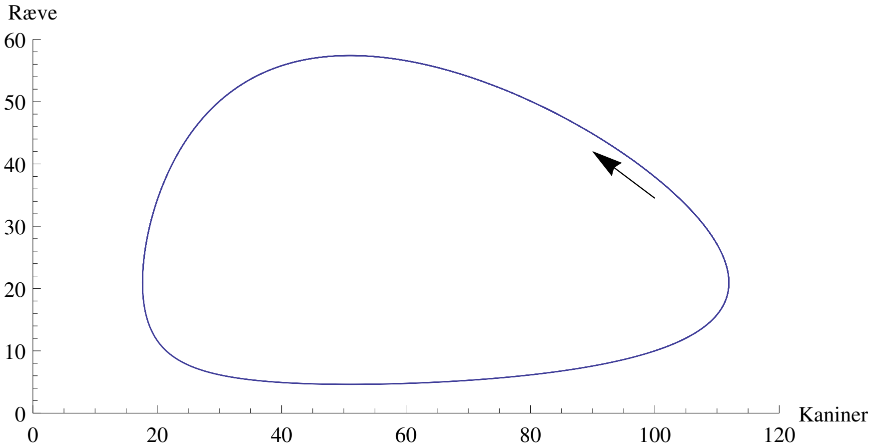
$\alpha = 0.0507$ $\beta = 0.00242$

$\gamma = 0.001782$ $\delta = 0.0909$

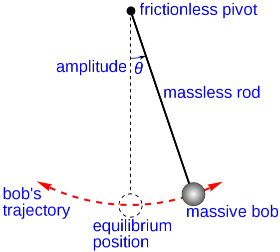
Lotka–Volterra populations modeller



Lotka–Volterra populations modeller – Fase plot

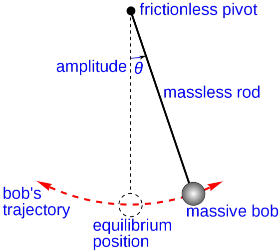


Pendul med modstand



$$\theta''(t) = -0.1 \cdot \sin\left(\theta(t)\right) - 0.2 \cdot \theta'(t)$$

Pendul med modstand



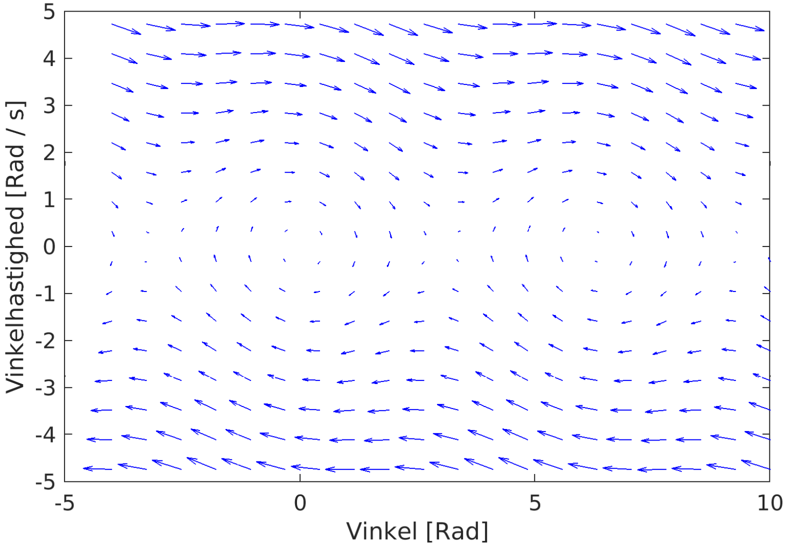
$$\theta''(t) = -0.1 \cdot \sin\left(\theta(t)\right) - 0.2 \cdot \theta'(t)$$

Den anden ordens differentialligning omskrives til to koblede første ordens differentialligninger. Det gøres ved at indføre en ny variabel $v = \theta'$.

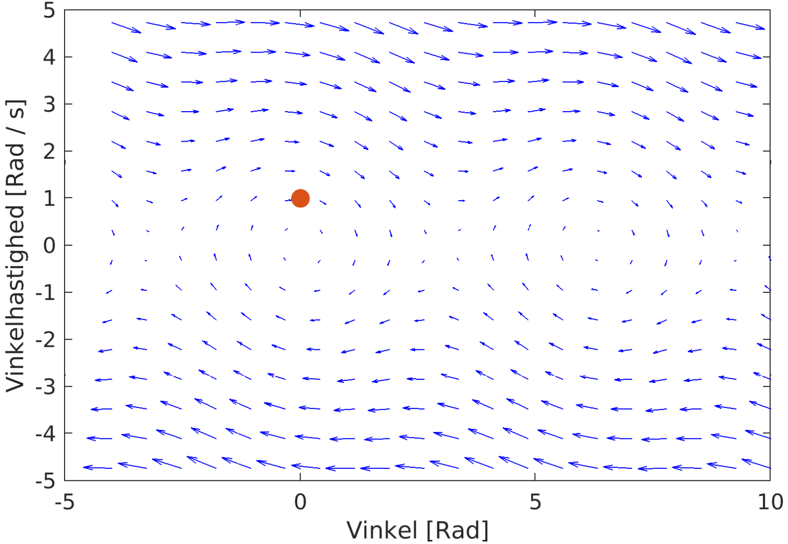
$$v'(t) = -0.1 \cdot \sin\left(\theta(t)\right) - 0.2 \cdot \theta'(t)$$
$$\theta'(t) = v(t)$$

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Simple_gravity_pendulum.svg

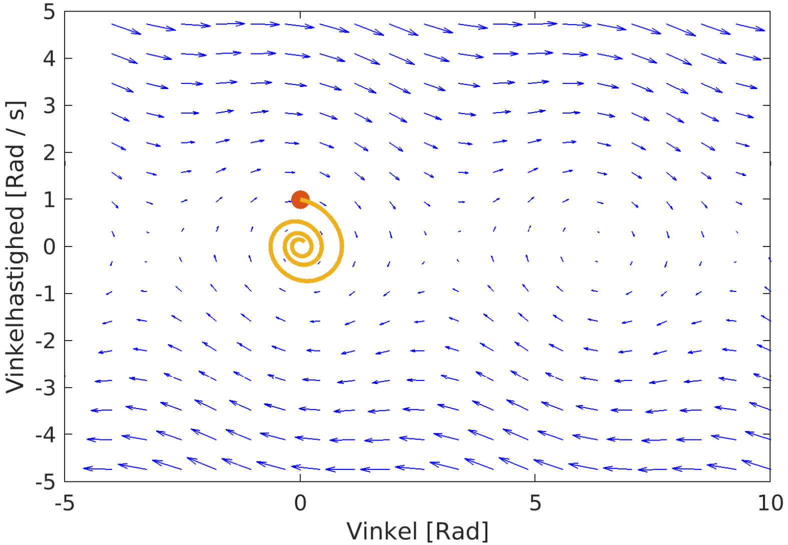
Pendul med modstand - fase diagram



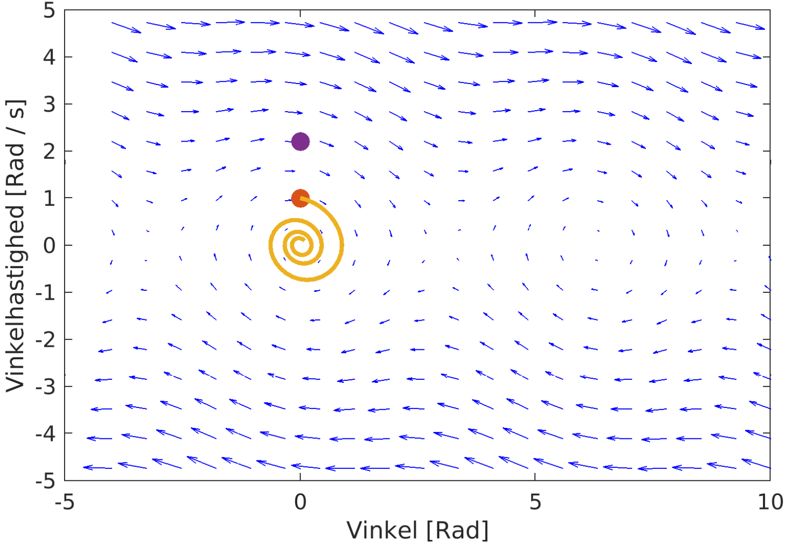
Pendul med modstand - fase diagram



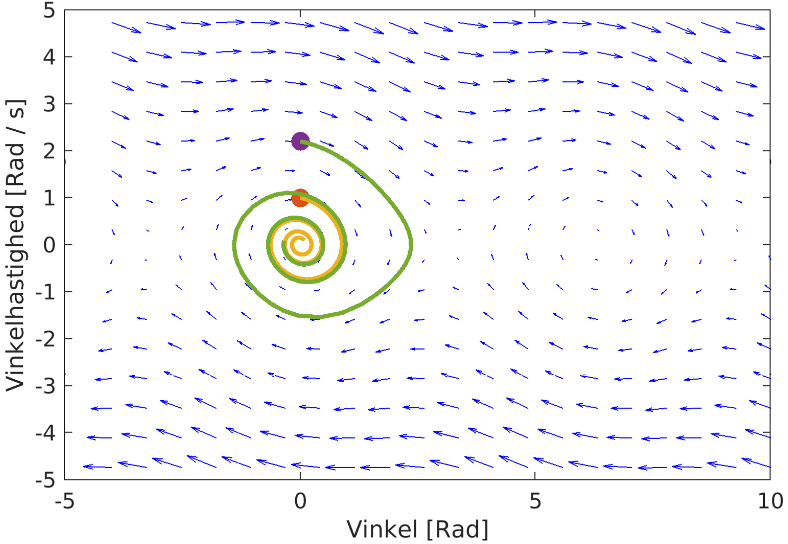
Pendul med modstand - fase diagram



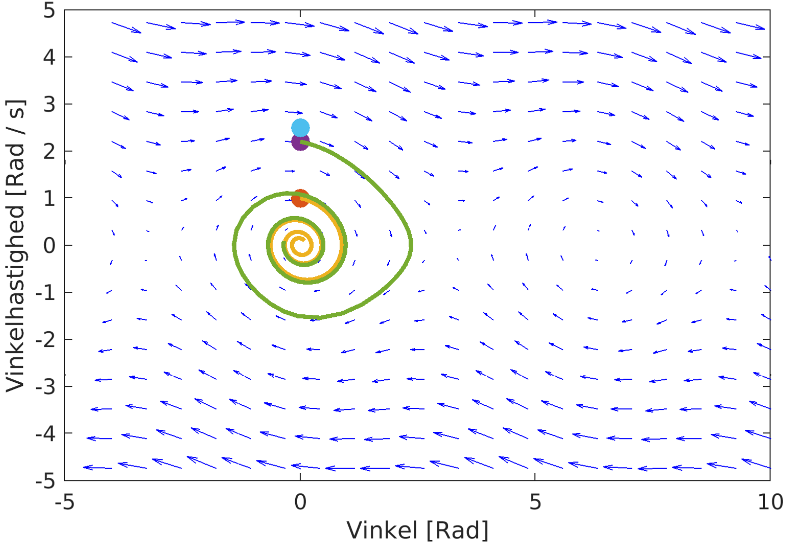
Pendul med modstand - fase diagram



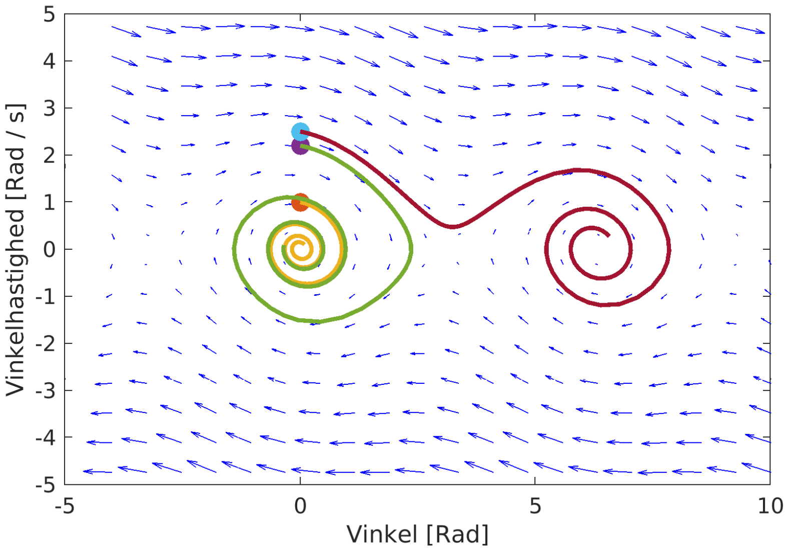
Pendul med modstand - fase diagram



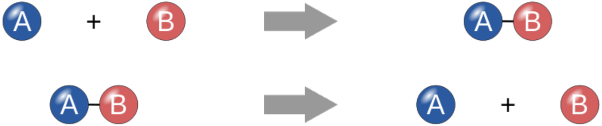
Pendul med modstand - fase diagram



Pendul med modstand - fase diagram



Kemiske reaktioner



$\mathrm{A} + \mathrm{B} \rightleftharpoons \mathrm{P}$

Hastighed til højre: $k_1 \cdot [A] \cdot [B]$

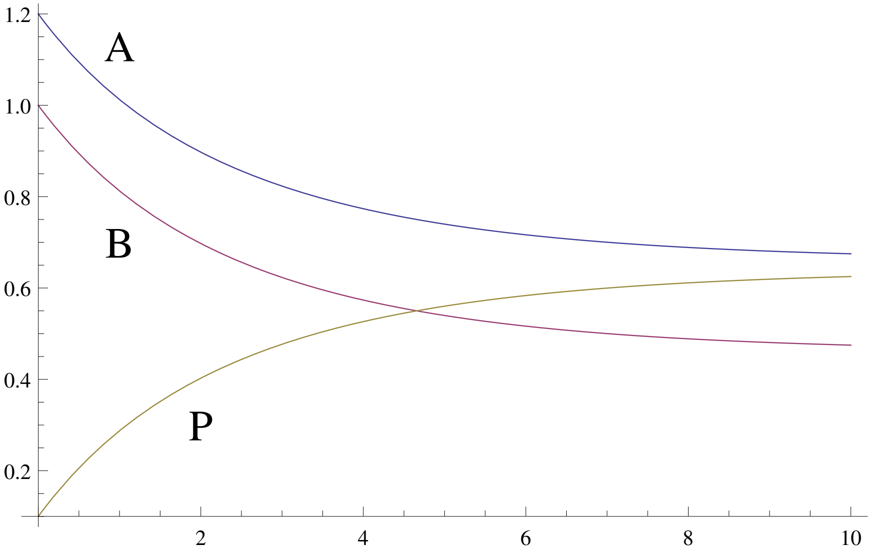
Hastighed til venstre: $k_2 \cdot [P]$

Kemiske reaktioner

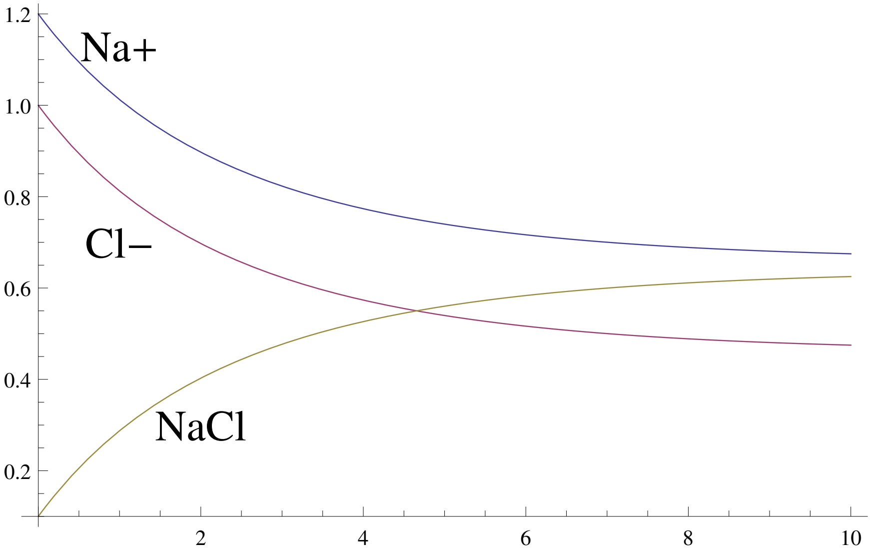
Tre koblede differentialligninger

$$\frac{d[A]}{dt} = k_2 \cdot [P] - k_1 \cdot [A] \cdot [B]$$
$$\frac{d[B]}{dt} = k_2 \cdot [P] - k_1 \cdot [A] \cdot [B]$$
$$\frac{d[P]}{dt} = -k_2 \cdot [P] + k_1 \cdot [A] \cdot [B]$$

Kemiske reaktioner



Kemiske reaktioner



Epidemi modeller

En epidemi model prøver at forudsige hvornår og hvor mange der bliver inficeret af en sygdom.

SIR modellens kategorier

En meget enkel model for en epidemi er SIR modellen.
I SIR modellen er befolkningen delt op i tre dele
(S, I og R) og over tid kan individder flyttes fra
S til I og fra I til R.

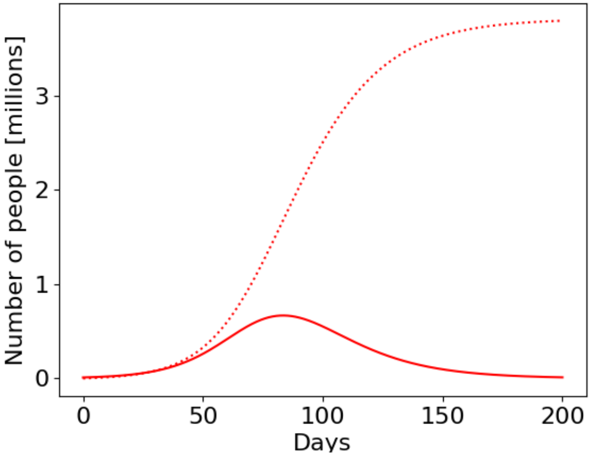
- **S** suceptible (modtagelig)
- **I** infected (inficeret)
- **R** recovered (ikke modtagelig)

SIR modellens differentialligninger

Hvor hurtigt individder flyttes fra en kategori til den næste er givet ved følgende tre koblede differentialligninger og de to parametre β og γ.

$$\frac{dS}{dt} = -\beta \cdot S \cdot I$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta \cdot S \cdot I - \gamma \cdot I$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma \cdot I$$

SIR modellen – forudsigelse



$\beta = 0.03$, $\gamma = 0.08$, $S = 3$, $I = 0.005$ og $R = 0$

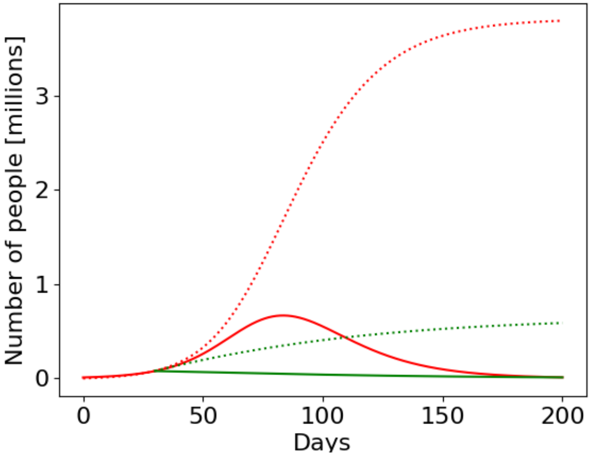
SIR modellen – hvad er formålet?

Hvorfor vil vi egentlig bruge modeller?

SIR modellen – hvad er formålet?

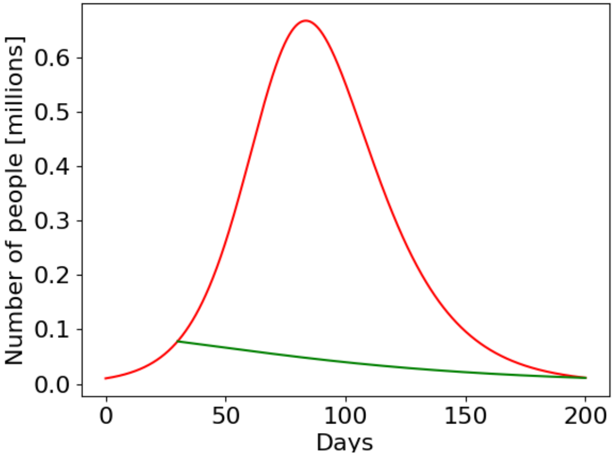
Hvorfor vil vi egentlig bruge modeller?
Vi kan forudsige hvad effekten af forskellige tiltag vil være!

SIR modellen – intervention



Ved dag 30 halveres smitteoverførslen $\beta = 0.015$

SIR modellen – intervention



Ved dag 30 halveres smitteoverførslen $\beta = 0.015$

SIR modellen – begrænsninger

SIR modellen er en meget simpel model der ikke tager højde for en lang række ting, eksempelvis

- karantæne af smittede personer
- tiden mellem at man bliver smittet og kan smitte andre
- forskellige adfærd i dele af befolkningen

Andre simuleringer

- Simulating an epidemic, video by 3Blue1Brown
  `https://www.youtube.com/watch?v=gxAaO2rsdIs`

Hvorfor differentialligninger?

Påstand

Verden er lettere at beskrive ved brug af differentialligninger.

Hvorfor differentialligninger?

Påstand

Verden er lettere at beskrive ved brug af differentialligninger.

Vist ved eksempler.

Tak for nu!

Kontakt information

Henrik Skov Midtiby
Syddansk Universitet, Dronecentret
hemi@mmmi.sdu.dk

Inspiration

- Differential equations, studying the unsolvable — DE1, 3Blue1Brown
  `https://www.youtube.com/watch?v=p_di4Zn4wz4`